



## **Analisis Kesulitan Mahasiswa Dalam Mengerjakan Soal Kalkulus Vektor Pada Materi Medan Vektor Terutama Pada Gradien Dan Turunan Berarah**

### ***Analysis of Students' Difficulties in Working on Vector Calculus Problems on Vector Field Material, Especially on Gradients and Directional Derivatives***

**Suci Dahlya Narpila<sup>1</sup>, Adisty Garandina<sup>2</sup>, Rahmayani<sup>3</sup>**

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Islam Negeri Sumatera Utara

Email: [adisty0305232052@uinsu.ac.id](mailto:adisty0305232052@uinsu.ac.id)

---

#### **Article Info**

##### Article history :

Received : 15-06-2025

Revised : 16-06-2025

Accepted: 18-06-2025

Published : 20-06-2025

#### **Abstract**

*This study aims to identify students' difficulties in understanding and solving problems related to vector calculus, particularly on vector field concepts involving gradients and directional derivatives. A qualitative descriptive approach was employed, involving two students from the Mathematics Education Study Program at the State Islamic University of North Sumatra as research subjects. The instruments used consisted of conceptual and applied questions, as well as observation sheets to document students' thought processes during problem-solving. Data analysis was carried out using the Miles and Huberman model, which includes data reduction, data presentation, and conclusion drawing. The results of the study indicate that students still experience difficulties in accurately writing partial derivative notation, composing complete gradient components, and systematically applying the steps required for solving directional derivative problems-such as evaluating at a point, normalizing the direction vector, and computing the dot product. Although some students arrived at the correct final answers, procedural and conceptual errors were still observed. These findings suggest the need for instruction that emphasizes conceptual understanding, procedural accuracy, and proper use of mathematical notation in learning vector calculus.*

**Keywords:** *vector calculus, gradient, directional derivative*

---

#### **Abstrak**

Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi kesulitan mahasiswa dalam memahami dan menyelesaikan soal kalkulus vektor, khususnya pada materi medan vektor yang mencakup konsep gradien dan turunan berarah. Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif dengan melibatkan dua orang mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Sumatera Utara sebagai subjek penelitian. Instrumen yang digunakan berupa soal konseptual dan aplikatif serta lembar observasi untuk merekam proses berpikir mahasiswa saat mengerjakan soal. Analisis data dilakukan dengan model Miles dan Huberman melalui tahapan reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam menuliskan notasi turunan parsial dengan tepat, menyusun komponen gradien secara lengkap, serta menerapkan langkah-langkah sistematis dalam penyelesaian soal turunan berarah, seperti evaluasi titik, normalisasi vektor arah, dan perhitungan dot product. Walaupun beberapa jawaban akhir benar, masih ditemukan kekeliruan dalam proses dan penyajian penyelesaian. Temuan ini mengindikasikan perlunya pembelajaran yang lebih menekankan pada pemahaman konseptual, ketelitian prosedural, serta penggunaan notasi matematis yang sesuai kaidah dalam materi kalkulus vektor.

**Kata Kunci:** *kalkulus vektor, gradien, turunan berarah*



## PENDAHULUAN

Matematika merupakan cabang ilmu yang berperan penting di berbagai ilmu pengetahuan yang mendasari perkembangan teknologi. Pentingnya mata pelajaran matematika menyebabkan dipelajari pada setiap jenjang pendidikan yaitu dari pendidikan dasar hingga pendidikan tinggi (Noviyanti, 2021). Matematika dapat dijadikan sebagai sarana berpikir yang jelas, ilmiah, logis, dan juga untuk memecahkan masalah kehidupan sehari-hari, serta ilmu yang banyak digunakan ilmu lain (Rohim & Prayogi, 2023).

Program studi pendidikan matematika merupakan program studi yang menghasilkan guru matematika. Bidang kajian mata kuliah di program studi pendidikan matematika diantaranya kalkulus. Kelompok mata kuliah kalkulus merupakan mata kuliah pada bidang kajian matematika. Kalkulus merupakan cabang dari matematika yang penting untuk dipelajari karena banyak kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari (Takaendengan et al., 2022). Pada program studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan, kalkulus terdapat berbagai macam, salah satunya kalkulus vektor.

Kalkulus Vektor merupakan salah satu cabang ilmu matematika tingkat lanjut yang memegang peranan penting dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, teknik, dan ilmu komputer. Kalkulus Vektor merupakan salah satu mata kuliah menempati posisi strategis untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis. Kalkulus Vektor berfungsi untuk mengembangkan kemampuan berpikir analitis, kritis, dan kreatif. Kalkulus Vektor juga penting bagi mahasiswa untuk meningkatkan wawasan matematis (Anisa, 2018). Kalkulus vektor di program studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan diberikan di semester empat. Berdasarkan pengalaman peneliti ketika belajar kalkulus vektor di kelas, banyak mahasiswa masih belum bisa menyelesaikan soal tentang medan vektor terutama gradien dan turunan berarah.

Hasil belajar mahasiswa merupakan hasil kegiatan dari proses belajar dalam bentuk pengetahuan sebagai akibat dari perlakuan atau pembelajaran yang dilakukan mahasiswa. Dari hasil belajar tersebut dapat diketahui kesulitan yang dialami oleh mahasiswa selama proses belajar. Kesulitan mahasiswa perlu diidentifikasi untuk mencari jenis kesalahan yang paling sering dilakukan oleh mahasiswa. Mengidentifikasi kesulitan mahasiswa dalam konten matematika adalah dengan menganalisis dokumen hasil pengerjaan mahasiswa (Isnaini, 2022). Faktor-faktor penyebab terjadinya kesulitan belajar mahasiswa yang mempunyai pengaruh terhadap kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal terdiri dari, 1) faktor internal mahasiswa berkaitan dengan hal-hal yang benar-benar dari dalam diri mahasiswa seperti sikap, kecerdasan, bakat, minat, dan motivasi. 2) faktor eksternal mahasiswa berkaitan dengan hal-hal yang berdasar dari luar diri mahasiswa seperti dari keluarga, dosen, teman dan kampus (Sumargiyani & Nafi, 2020).

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sejauh mana mahasiswa memahami konsep medan vektor terutama gradien dan turunan berarah dan mengidentifikasi kesulitan-kesulitan yang mereka hadapi dalam proses pembelajaran Kalkulus Vektor.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif yang bertujuan untuk menganalisis tingkat pemahaman dan kesulitan mahasiswa dalam memahami serta menerapkan



medan vektor terutama gradien dan turunan berarah pada materi kalkulus vektor. Pendekatan ini dipilih karena memungkinkan peneliti untuk mengeksplorasi data secara mendalam melalui kata-kata, tindakan, dan tanggapan langsung dari subjek penelitian. Penelitian ini melibatkan dua orang mahasiswa program studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Sumatra Utara yang telah menempuh mata kuliah Kalkulus Vektor sebagai subjek penelitian. Pemilihan subjek dilakukan secara purposive dengan mempertimbangkan variasi kemampuan akademik mereka untuk memperoleh gambaran yang lebih beragam mengenai tingkat pemahaman dan kesulitan yang dialami.

Instrumen utama dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri (human instrument), yang dibantu oleh dua jenis instrumen tambahan, yaitu: soal mengenai medan vektor terutama gradien dan turunan berarah, dan lembar observasi. Soal dirancang untuk mengukur sejauh mana mahasiswa memahami definisi, makna geometris, dan penerapan medan vektor terutama gradien dan turunan berarah dalam menyelesaikan soal. Observasi dilakukan selama mahasiswa mengerjakan soal untuk mencatat perilaku, strategi, dan respon spontan mereka terhadap tugas yang diberikan. Proses pengumpulan data dilakukan dalam dua tahap. Pertama, mahasiswa diminta untuk mengerjakan soal tentang medan vektor terutama gradien dan turunan berarah secara individual. Kedua, peneliti melakukan observasi terhadap proses penyelesaian soal untuk melihat bagaimana mahasiswa memaknai informasi dan menerapkan konsep. Semua data yang diperoleh dianalisis menggunakan teknik analisis data kualitatif model Miles dan Huberman, yang mencakup tiga tahap: reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Reduksi data dilakukan dengan menyaring informasi penting dari hasil tes dan observasi (Thalib, 2022).

Penyajian data disusun dalam bentuk narasi deskriptif untuk masing-masing subjek, sedangkan penarikan kesimpulan dilakukan dengan mengidentifikasi pola-pola kesulitan, jenis miskonsepsi, dan faktor-faktor yang mempengaruhi pemahaman mahasiswa terhadap medan vektor terutama gradien dan turunan berarah.

## **HASIL DAN PEMBAHASAN**

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran wajib dipelajari oleh siswa mulai dari jenjang sekolah dasar sampai perguruan tinggi. Matematika menjadi mata pelajaran wajib dari sekolah dasar sampai perguruan tinggi karena mampu menciptakan teknologi dibutuhkan kemampuan menguasai ilmu matematika yang baik sejak dini. Matematika adalah sarana untuk memecahkan masalah sehari-hari yang harus dikuasai oleh siswa (Wites et al., 2022).

### **Identifikasi jenis kesalahan mahasiswa dalam mengerjakan soal kalkulus vektor materi medan vektor terutama gradien dan turunan berarah**

Bagian ini secara rinci akan membahas dan menguraikan berbagai jenis kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal terkait medan vektor terutama gradien dan turunan berarah pada materi Kalkulus Vektor. Identifikasi kesalahan ini dilakukan melalui analisis mendalam terhadap data yang diperoleh dari jawaban tertulis mahasiswa yang diberikan dalam bentuk soal berbasis konsep dan aplikasi, serta hasil wawancara semi terstruktur yang dilakukan setelah pengerjaan soal. Proses ini bertujuan untuk menggali lebih jauh bagaimana mahasiswa memahami konsep yang ditanyakan, bagaimana mereka menalar dan memilih langkah penyelesaian, serta faktor faktor apa saja yang menjadi penyebab terjadinya kesalahan. Dengan



pendekatan ini, diharapkan dapat diperoleh gambaran yang lebih komprehensif mengenai pola kesalahan yang terjadi, baik dari segi konseptual, prosedural, maupun perhitungan teknis.

Tentukanlah nilai gradien ( $\nabla F$ ) Dari fungsi berikut.

$$f(x, y, z) = e^{2xyz}$$

Penyelesaian

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla F = \frac{\partial(e^{2xyz})}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(e^{2xyz})}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial(e^{2xyz})}{\partial z} \hat{k}$$

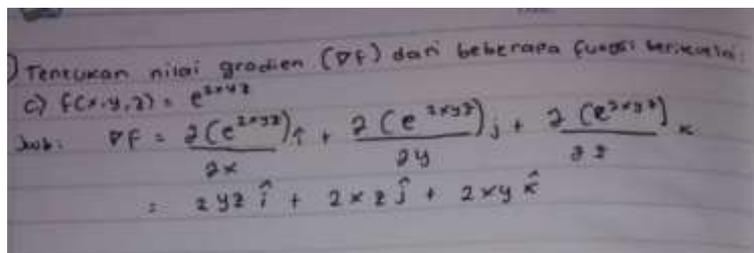
$$\nabla F = e^{2xyz}(2yz)\hat{i} + e^{2xyz}(2xz)\hat{j} + e^{2xyz}(2xy)\hat{k}$$

$$\nabla F = 2yze^{2xyz}\hat{i} + 2xze^{2xyz}\hat{j} + 2xye^{2xyz}\hat{k}$$

**Tabel 1:** untuk soal mengenai gradien beserta jawaban yang benar

Berikut ini merupakan jawaban-jawaban yang di berikan oleh subjek penelitian untuk soal di tabel 1:

**Subjek A**

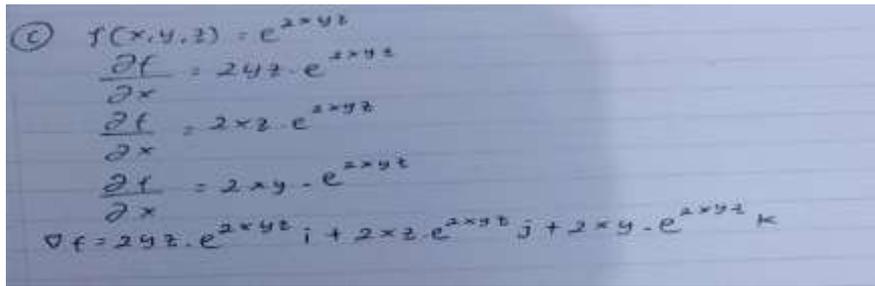


**Gambar 1:** jawaban subjek A untuk soal di tabel 1

Dalam penyelesaian soal turunan gradien dari fungsi  $f(x, y, z) = e^{2xyz}$ , ditemukan beberapa kesalahan penting baik dalam penulisan notasi maupun perhitungan. Kesalahan pertama terletak pada penggunaan notasi turunan parsial yang tidak sesuai kaidah matematika, di mana simbol  $\partial$  dituliskan seperti pembilang pecahan biasa, dan konstanta 2 diletakkan secara keliru di luar turunan, padahal ia merupakan bagian dari fungsi komposit. Selain itu, perhitungan turunan parsial juga tidak mencerminkan sifat fungsi eksponensial berantai, karena hasil akhir gradien yang ditulis tidak mencantumkan faktor  $e^{2xyz}$  yang seharusnya melekat pada semua komponen gradien. Dengan demikian, meskipun sebagian struktur jawaban tampak mengikuti bentuk umum gradien, pengabaian terhadap faktor eksponensial dan kesalahan notasi menyebabkan jawaban menjadi tidak tepat. Penyelesaian yang benar seharusnya menggunakan aturan rantai dengan cermat dan menampilkan hasil gradien dalam bentuk lengkap, yakni  $\nabla F = 2yze^{2xyz}\hat{i} + 2xze^{2xyz}\hat{j} + 2xye^{2xyz}\hat{k}$ .



Subjek B



Gambar 2: jawaban subjek B untuk soal di tabel 1

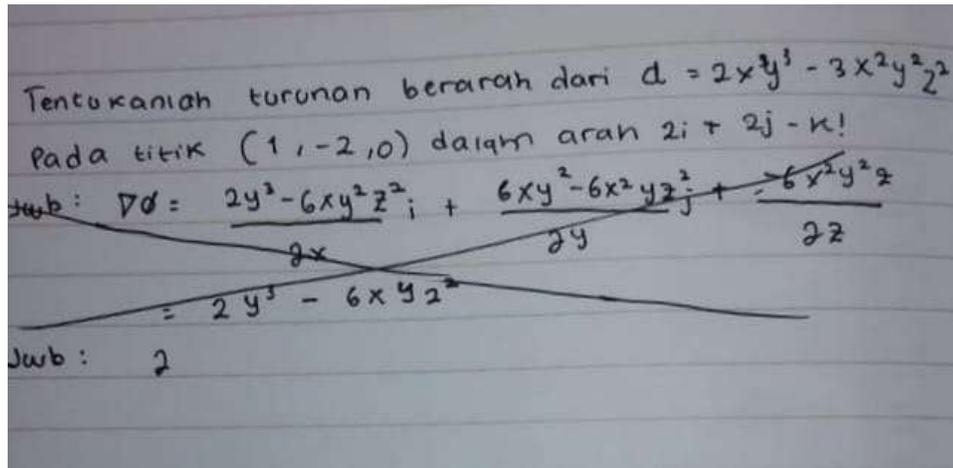
Dalam penyelesaian soal turunan parsial dari fungsi  $f(x, y, z) = e^{2xyz}$ , ditemukan bahwa meskipun hasil akhir gradien dituliskan dengan benar, terdapat kesalahan dalam penulisan notasi turunan parsial sebelumnya. Ketiga komponen turunan diberi label sebagai  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , padahal hanya komponen pertama yang merupakan turunan terhadap  $x$ ; dua komponen lainnya seharusnya dilabeli sebagai  $\frac{\partial f}{\partial y}$  dan  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . Kesalahan ini menunjukkan kekeliruan dalam penggunaan notasi, bukan dalam perhitungan matematisnya, karena isi dari masing-masing turunan sudah benar. Akibatnya, meskipun hasil akhir gradien yang dituliskan dalam bentuk vektor sudah tepat dan sesuai dengan kaidah diferensial multivariabel, proses penulisan langkah-langkah sebelumnya perlu diperbaiki agar sesuai dengan konvensi notasi yang benar dan tidak membingungkan pembaca.

<p>Tentukanlah turunan berarah dari <math>\alpha = 2xy^3 - 3x^2y^2z^2</math> pada titik <math>(1, -2, 0)</math> dalam arah <math>2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}</math>!</p> <p>Penyelesaian</p> $U = \frac{U}{ U } = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$ $\nabla \alpha \cdot u = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left( \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k} \right)$ $\nabla \alpha \cdot u = \left( \frac{\partial(2xy^3 - 3x^2y^2z^2)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(2xy^3 - 3x^2y^2z^2)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial(2xy^3 - 3x^2y^2z^2)}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left( \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k} \right)$ $\nabla \alpha \cdot u = (2y^3 - 6xy^2z^2 \hat{i} + 6xy^2 - 6x^2yz^2 \hat{j} - 6x^2y^2z \hat{k}) \cdot \left( \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k} \right)$ $\nabla \alpha \cdot u = \frac{2}{3}2y^3 - 6xy^2z^2 \hat{i} + \frac{2}{3}6xy^2 - 6x^2yz^2 \hat{j} - \frac{1}{3}6x^2y^2z \hat{k}$ <p>Substitusikan <math>(1, -2, 0)</math></p> $\nabla \alpha \cdot u(1, -2, 0) = \frac{2}{3}2(-2)^3 - 6(1)(-2)^2(0)^2 + \frac{2}{3}6(1)(-2)^2 - 6(1)^2(-2)(1)^2 - \frac{1}{3}6(1)^2(-2)^2(0)$ $\nabla \alpha \cdot u(1, -2, 0) = \frac{2}{3}(-16) + \frac{2}{3}(24) - \frac{1}{3}(0)$ $\nabla \alpha \cdot u(1, -2, 0) = -\frac{32}{3} + \frac{48}{3} = \frac{16}{3}$
---

Tabel 2: untuk soal mengenai turunan berarah beserta jawaban yang benar

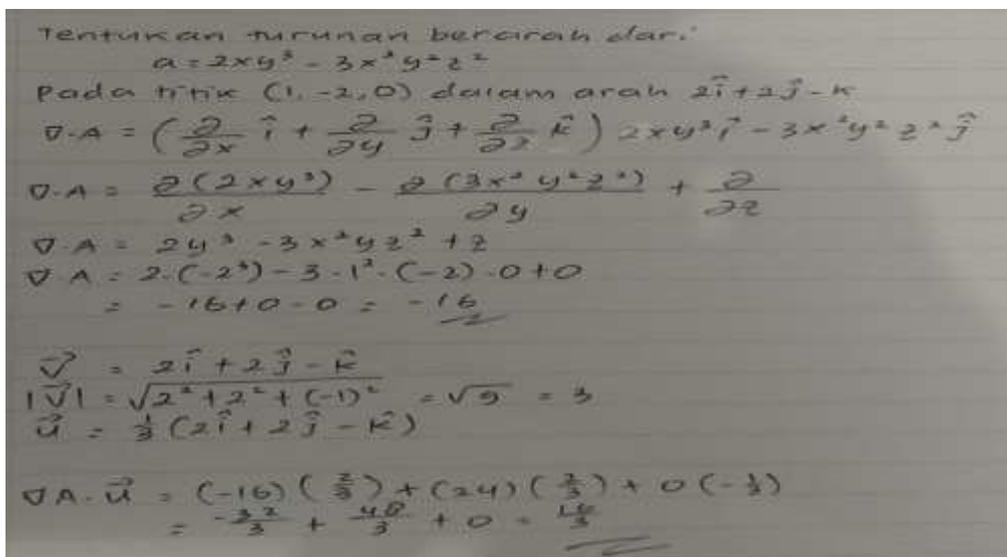


Subjek A



Gambar 3: jawaban subjek A untuk soal di tabel 2

Berdasarkan analisis terhadap jawaban siswa, kesalahan utama dalam penyelesaian soal turunan berarah terletak pada ketidaklengkapan langkah-langkah perhitungan dan ketidaksesuaian alur logika penyelesaian. Meskipun siswa telah menuliskan turunan parsial terhadap  $x, y,$  dan  $z,$  hanya hasil turunan terhadap  $x$  yang digunakan dalam perhitungan akhir, sementara dua komponen gradien lainnya diabaikan. Selain itu, siswa tidak melanjutkan ke tahap penting berikutnya, yaitu mengevaluasi vektor gradien pada titik yang diberikan, menormalkan vektor arah, serta menghitung hasil dot product antara gradien dan vektor satuan arah. Ketidaktuntasan dalam penyelesaian ini menyebabkan jawaban akhir **2** tidak memiliki dasar matematis yang jelas dan tampak seperti tebakan. Padahal, jika langkah-langkah dilakukan secara sistematis dengan menyusun gradien secara lengkap, menormalkan vektor arah, dan melakukan operasi dot product hasil turunan berarah yang benar adalah  $\frac{16}{3}$ . Oleh karena itu, kekeliruan ini menunjukkan perlunya ketelitian dalam mengikuti prosedur turunan berarah secara menyeluruh dan konsisten.



Gambar 4: jawaban subjek B untuk soal di tabel 2



Berdasarkan hasil analisis terhadap jawaban yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa proses penyelesaian soal turunan berarah secara umum sudah dilakukan dengan benar dan menghasilkan jawaban akhir yang tepat, yaitu  $\frac{16}{3}$ . Langkah-langkah penting seperti menentukan gradien fungsi, mengevaluasi nilai gradien pada titik yang ditentukan, menormalkan vektor arah, serta menghitung hasil dot product antara gradien dan vektor satuan arah telah dilakukan secara sistematis. Namun demikian, masih terdapat beberapa kekeliruan kecil, khususnya pada aspek penulisan notasi turunan parsial yang kurang tepat dan berpotensi membingungkan. Selain itu, penjabaran turunan parsial tidak dituliskan secara lengkap dalam bentuk vektor komponen, serta evaluasi setiap komponen gradien belum disajikan secara eksplisit dan terpisah. Walaupun kesalahan tersebut tidak memengaruhi hasil akhir, hal ini menunjukkan pentingnya ketelitian tidak hanya dalam perhitungan, tetapi juga dalam penyajian dan penulisan matematis yang sesuai kaidah, agar solusi yang disampaikan lebih mudah dipahami dan komunikatif.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan terhadap mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Sumatera Utara, dapat disimpulkan bahwa meskipun mahasiswa telah memperoleh pembelajaran mengenai kalkulus vektor, khususnya pada materi medan vektor berupa gradien dan turunan berarah, mereka masih mengalami kesulitan dalam memahami dan menerapkan konsep-konsep tersebut secara tepat. Kesulitan yang muncul mencakup kesalahan dalam penulisan notasi turunan parsial, ketidaktepatan dalam menyusun komponen gradien, serta kurangnya pemahaman terhadap langkah-langkah sistematis dalam menyelesaikan soal turunan berarah, seperti evaluasi pada titik tertentu, normalisasi vektor arah, dan perhitungan dot product.

Meskipun ada jawaban yang benar secara akhir, proses penyelesaiannya sering kali tidak lengkap atau kurang sesuai dengan kaidah matematis yang benar. Faktor-faktor penyebab kesulitan tersebut meliputi aspek internal seperti motivasi, minat, dan pemahaman dasar mahasiswa, serta aspek eksternal seperti pendekatan pembelajaran yang kurang menekankan pada pemahaman konseptual dan prosedural. Oleh karena itu, diperlukan strategi pembelajaran yang lebih menekankan pada pemahaman mendalam, latihan penyajian notasi yang benar, serta penerapan langkah-langkah penyelesaian yang sistematis dan logis dalam materi kalkulus vektor.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anisa, T. W. (2018). Pengembangan Bahan Ajar Mata Kuliah Kalkulus Vektor untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis. *JRPM (Jurnal Review Pembelajaran Matematika)*, 3(2), 102–113. <https://doi.org/10.15642/jrpm.2018.3.2.102-113>
- Isnaini, M. (2022). Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Pertidaksamaan, Fungsi dan Limit pada Mata Kuliah Kalkulus. *Jurnal Amal Pendidikan*, 3(3), 234–241.
- Noviyanti, P. L. (2021). ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL KALKULUS III. *Jurnal Pembelajaran Dan Pengembangan Matematika (PEMANTIK)*, 1(2), 155–164.
- Rohim, A., & Prayogi, B. T. (2023). Analisis Kesulitan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Aljabar Ditinjau Dari Kemampuan Berpikir Logis. *Inspiramatika*, 9(1), 65–75. <https://doi.org/10.52166/inspiramatika.v9i1.4446>



- Sumargiyani, & Nafi, B. (2020). Analisis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal kalkulus diferensial. *Prisma*, 3, 591–598.
- Takaendengan, B. R., Asriadi, A., & Takaendengan, W. (2022). Analisis Kesulitan Belajar Mahasiswa pada Mata Kuliah Kalkulus Lanjut. *Sepren*, 3(2), 67–75. <https://doi.org/10.36655/sepren.v3i2.690>
- Thalib, M. A. (2022). Pelatihan Analisis Data Model Miles Dan Huberman Untuk Riset Akuntansi Budaya. *Madani: Jurnal Pengabdian Ilmiah*, 5(1), 23–33. <https://doi.org/10.30603/md.v5i1.2581>
- Wites, R., Rahmi, R., & Delyana, H. (2022). Analisis Kesulitan Siswa Menyelesaikan Soal Pemecahan Masalah Matematika Ditinjau Dari Gaya Belajar. *Inspiramatika*, 8(2), 150–158. <https://doi.org/10.52166/inspiramatika.v8i2.3558>